Аллар Веэлмаа

РАБОЧАЯ КНИГА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ XII КЛАССОВ

2024

maurus

Издательство Maurus подтверждает, что рабочая книга соответствует государственному учебному плану гимназий и требованиям к учебной литературе, установленным министром образования и науки.

Автор благодарит рецензентов: учителя реальной гимназии Ныо Сирье Силд и учителя средней школы Лоо Агу Оясоо, за полезные комментарии и интересные идеи. Все комментарии и предложения по поводу этой книги просьба присылать на адрес электронной почты allarveelmaa8@hotmail.com.

Аллар Веэлмаа
Рабочая книга по математике для XII классов

Переводчик: Борис Гордон
Языковой редактор: Людмила Еланская
Рецензенты Сирье Силд и Агу Оясоо
Редактор Инге Вестрик
Техническая реализация: Хейси Вяльяк
Фотографии из коллекции фотографий издательства Maurus, рисунки Аллар Веэлмаа

ISBN 978-9916-738-40-5

Дигитальную учебную программу Maurus'а найдёшь в TaskuTark.

(taskutark.ee)

Тартуское шоссе 74, 10144 Таллинн, телефон 5919 6117
www.kirjastusmaurus.ee
tellimine@kirjastusmaurus.ee

Для использующего рабочую книгу

Эта рабочая книга предназначена для Вас, гимназист. В этой книге вы найдете необходимые формулы и примеры решений, но большую часть задач придется решать самостоятельно от начала до конца. К заданиям в рабочей книге разумно переходить тогда, когда соответствующая тема пройдена и впереди вас ждет зачетная или контрольная работа.
Для систематического повторения курса средней школы и подготовки к государственному экзамену рекомендую использовать сборник практических заданий «Готовься к государственному экзамену по математике», который содержит большое количество задач, примеры решений, а также задач государственного экзамена последних лет с ответами.
Не на все задания имеются ответы, для проверки воспользуйтесь компьютерными программами WolframAlpha, GeoGebra, Symbolab и др.

В рабочей тетради содержатся задания по следующим темам:
1) интеграл;
2) повторение планиметрии;
3) аналитическая геометрия в пространстве;
4) пространственные фигуры;
5) повторение курса гимназии (задания государственных экзаменов за предыдущие годы).

Подспорьем в решении задач рабочей книги будут обучающие видео и тесты, которые можно найти в Интернете по адресу: allarveelmaa.ee.

С наилучшими пожеланиями
Аллар Веэлмаа

1. Интеграл и его приложения

1.1. Первообразная функция. Таблица интегралов. Нахождение неопределённого интеграла.

Первообразной функцией $y = f(x)$ в области X называют функцию $y = F(x) + C$ (где C произвольная константа), производная в рассматриваемой области X равна заданной функции, т.е.
$[F(x)+C]' = f(x)$.

Общее выражение $F(x) + C$ всех первообразных функций (где $F(x)$ одна из первообразных функций и C произвольная константа) для рассматриваемой функции $y = f(x)$ называется неопределённым интегралом функции $y = f(x)$.

Нахождение неопределённого интеграла

$\int f(x)dx = F(x)+C$, где $F'(x) = f(x)$ и C произвольная константа;

$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, где c константа;

$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

Таблица интегралов

$\int 0dx = C$	$\int dx = x + C$	$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, где $n \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x}+C$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}+C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

Пример 1. Найдём три первообразные функции для функции $y = f(x)$.

a) Если $f(x) = 2x + 3$, то
$F_1(x) = x^2 + 3x + 5$; $F_2(x) = x^2 + 3x - 9$; $F_3(x) = x^2 + 3x + 2015$;

b) если $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7$, то

$F_1(x) = \frac{1}{5}\cdot x^5 - 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 + 7x + 2015$; $F_2(x) = \frac{1}{5}\cdot x^5 - 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 + 7x + 1$; $F_3(x) = \frac{1}{5}\cdot x^5 - 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3 + 7x - 4$;

c) если $f(x) = 2\sin x - 3\cos x$, то
$F_1(x) = -2\cos x - 3\sin x + 2$; $F_1(x) = -2\cos x - 3\sin x - 2$; $F_1(x) = -2\cos x - 3\sin x + \pi$.

Пример 2. Найдём неопределённые интегралы.

a) $\int (x^2 + x + 2)dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x + C$;

b) $\int \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1}dx = \int \dfrac{(x-3)\cancelto{1}{(x+1)}}{\cancelto{1}{x+1}}dx = \int (x-3)\,dx = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + C$;   c) $\int\left(e^x + \dfrac{1}{x}\right)dx = e^x + \ln\lvert x\rvert + C$;

d) $\int\left(3u^{-2}-5u^{-3}\right)du=-3u^{-1}+2{,}5u^{-2}+C$; e) $\int 2a\,dx=2ax+C$;

f) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$;

g) $\int(3\cos x-4\sin x)dx=3\sin x+4\cos x+C$.

1. Найдите для функции $y = f(x)$ её первообразную функцию.

a) $y = 4x + 3$ b) $y = x^5 + 6x^2 + 7$ c) $y=\frac{3}{x}-e^x$

d) $y=x-\frac{1}{x^2}$ e) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+2^0$ f) $y=\frac{1-x^2}{x+1}$

g) $y=e+\pi$ h) $y=\frac{x^2-3x-10}{x+2}$ i) $y=\sin x+\cos\pi$

Ответы: a) $2x^2 + 3x + C$; b) $\frac{1}{6}x^6+2x^3+7x+C$; c) $3\ln|x|-e^x+C$; d) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$; e) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$ или $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x+C$; f) $x-0{,}5x^2+C$; g) $(e+\pi)x+C$; h) $0{,}5x^2-5x+C$; i) $-x-\cos x+C$.

2. Найдите для функции $f(x) = x^2 - 3x$ её первообразную функцию, график которой проходит через точку $Q(3; 0)$.

3. Найдите неопределённый интеграл.

a) $\int\left(3x^3-3x+5\right)dx=$

b) $\int\left(3x^4-4x^3\right)dx=$

c) $\int\left(3e^4-4x^3\right)dx=$

d) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$

e) $\int\frac{x^2-3x-5}{x}dx=$

f) $\int\frac{6}{\sqrt{x}}dx=$

Ответы: a) $0{,}75x^4-1{,}5x^2+5x+C$; b) $0{,}6x^5-x^4+C$; c) $-x^4+3e^4x+C$; d) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$;

e) $0{,}5x^2-3x-5\ln|x|+C$; f) $12\sqrt{x}+C$.

4. Найдите $\int\left(\frac{1}{2}e^{x}-\cos x\right)dx$, зная, что значение первообразной функции равно 0,5, при $x = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}e^{x}-\sin x$.

5. Найдите $\int\left(\frac{2}{x}-1\right)dx$, зная, что значение первообразной функции равно 2, при $x = 1$.

Ответ: $2\ln|x|-x+3$.

6. Найдите для функции $y = x^3$ её первообразную функцию, график которой проходит через точку $M(2; 1)$.

Ответ: $y=\frac{1}{4}x^{4}-3$.

7. Найдите для функции $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ её первообразную функцию, график которой проходит через точку $N(4; 4)$.

Ответ: $y=2\sqrt{x}$.

8. Найдите для функции $y = \sin x$ её первообразную функцию, график которой проходит через точку $Q(-\pi; 0)$.
Ответ: $y = -\cos x - 1$.

1.2. Нахождение определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ интегрируема и имеет первообразную функцию $F(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Нахождение определённого интеграла

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ $\quad \int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

Пример 1. Посчитаем определённые интегралы.

a) $\int_1^5 (2x+5)\,dx = \left(x^2+5x\right)\Big|_1^5 = 5^2+5\cdot 5-(1^2+5\cdot 1) = 25+25-6 = 44;$

b) $\int_{-2}^2 (2x^2+5)\,dx = \left(2\cdot\frac{x^3}{3}+5x\right)\Bigg|_{-2}^2 = 2\cdot\frac{2^3}{3}+5\cdot 2-\left(2\cdot\frac{(-2)^3}{3}+5\cdot(-2)\right) = 30\frac{2}{3};$

c) $\int_{-1}^1 (2x^3+x)\,dx = \left(2\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1 = \left(2\cdot\frac{1^4}{4}+\frac{1^2}{2}\right)-\left(2\cdot\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^2}{2}\right) = 0;$

d) $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi-\cos 0) = 2;$

e) $\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e-1;$

f) $\int_1^e \frac{2}{x}\,dx = 2\ln x\Big|_1^e = 2(\ln e-\ln 1) = 2.$

1. Посчитайте определённые интегралы.

a) $\int_{-3}^2 (x^2-x-2)\,dx =$

b) $\int_0^2 (6x^2-x)\,dx =$

c) $\int_{-5}^{-2} (-x^2-3x-2)\,dx =$

d) $\int_{-2}^2 (x^2-0{,}5x)\,dx =$

Ответы: a) $4\frac{1}{6}$; b) 14; c) −13,5; d) $5\frac{1}{3}$.

2. Посчитайте.

a) $\int_{1}^{3}(x+2)^2\,dx=$

b) $\int_{-1}^{0}(3x+2)^2\,dx=$

c) $\int_{1}^{3}2(4x-3)^2\,dx=$

d) $\int_{-1}^{3}(5x+2)^3\,dx=$

e) $\int_{1}^{e}(e+x)\,dx=$

f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx=$

g) $\int_{2}^{3}5^x\,dx=$

h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{3}{\cos^2 x}\,dx=$

Ответы: a) $32\frac{2}{3}$; b) 1; c) $121\frac{1}{3}$; d) 4172; e) $0{,}5\left(-1-2e+3e^2\right)$; f) 0; g) $\frac{100}{\ln 5}$; h) 3.

3. Проверьте, справедливо ли равенство. Найдите три ошибки.

a) $\int_{-2}^{3}\frac{x^2-6x+5}{5-x}\,dx=2{,}5$

b) $\int_{2}^{3}\frac{9-12x+4x^2}{3-2x}\,dx=-2$

c) $\int_{2}^{3}\frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx=9\frac{2}{3}$

d) $\int_{1}^{3}\frac{x^2-6x+5}{x}\,dx=\ln 243-8$

e) $\int_{2}^{3}\frac{9-12x+4x^2}{\sqrt{x}}\,dx=8{,}4(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

f) $\int_{1}^{4}\frac{5x^2+3}{x^2}\,dx=17{,}25$

g) $\int_{5}^{9}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\,dx=26-\frac{10\sqrt{5}}{3}$

h) $\int_{2}^{4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx\approx 0{,}4342$

i) $\int_{2}^{3}\frac{2x^4-5x^2+3}{x^2}\,dx=8\frac{1}{6}$

j) $\int_{-2}^{3}\frac{x^2-6x+5}{x-5}\,dx=2{,}5$

k) $\int_{2}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\right)dx=22{,}6$

l) $\int_{2}^{3}\left(0{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3\right)dx=0$

1.3. Расчёт площади поверхности и объёма фигуры

Площадь поверхности

Если фигура сверху ограничена линией $y = f(x)$, снизу линией $y = g(x)$, а бока ограничены прямыми $x = a$ и $x = b$, то $S=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

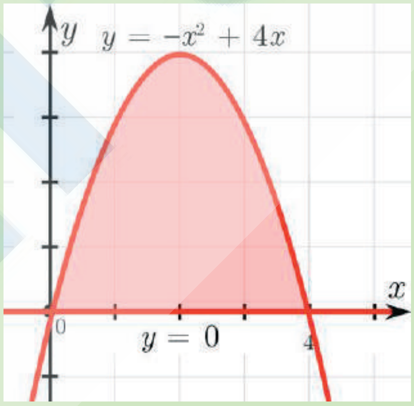
Объём тела вращения

Если фигура вращается вокруг оси x, то ее объем находится по формуле

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

где пределы интегрирования a и b указывают на то, что фигура расположена между плоскостями $x = a$ и $x = b$.

Пример 1. Найдём площади поверхности, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x$ и $y = 0$.



Линией $y = -x^2 + 4x$ является раскрытая вниз парабола, а $y = 0$ является прямой, расположенной на оси x.

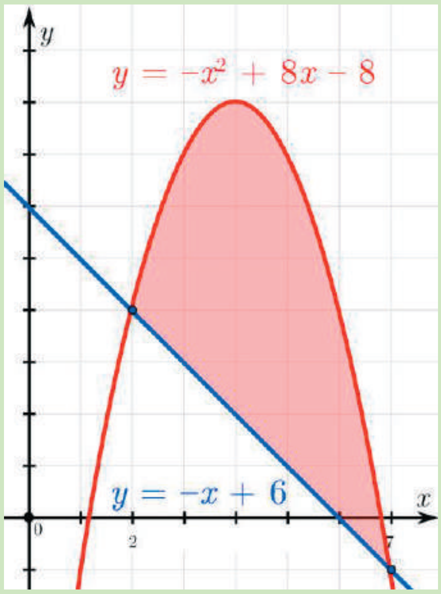
Находим пределы интегрирования, т.е. те значения x, при которых парабола проходит через ось x. Для этого решим уравнение $-x^2 + 4x = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Найдём площадь поверхности:

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\Bigg|_0^4=-\frac{4^3}{3}+2\cdot4^2-0+0=10\frac{2}{3}.$$

Ответ: площадь поверхности равна $10\frac{2}{3}$ единиц площади.

Пример 2. Найдём площади поверхности, ограниченной линиями $y = -x^2 + 8x - 8$ и $y = -x + 6$.



Чтобы найти пределы интегрирования, нам нужно вычислить абсциссы (т.е. x-координаты) точек пересечения параболы и прямой.

Решениями уравнения $-x^2 + 8x - 8 = -x + 6$ являются 2 и 7.

Для нахождения площади поверхности посчитаем

$$\int_2^7\left[(-x^2+8x-8)-(-x+6)\right]dx=\int_2^7\left[(-x^2+9x-14)\right]dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+4{,}5x^2-14x\right)\Bigg|_2^7=$$

$$=-\frac{7^3}{3}+4{,}5\cdot7^2-14\cdot7-\left(-\frac{2^3}{3}+4{,}5\cdot2^2-14\cdot2\right)=20\frac{5}{6}.$$

Ответ: площадь поверхности равна $20\frac{5}{6}$ единиц площади.